

Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425):

Lista #6

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

a) Calcule o valor das seguintes expressões:

$$i) \frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \quad ii) (1-i)^4 \quad iii) \frac{2+i}{3-i} \quad iv) \left| \frac{2i-1}{i-2} \right|$$

b) Mostre que $a, z \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{R}$, então $|z-a| = b$ define uma circunferência de raio b centrada em a .

c) Encontre uma expressão analítica na representação cartesiana para $\sqrt{z}$, com $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Problema 2

As funções hiperbólicas para variáveis complexas podem ser definidas da seguinte maneira:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Utilizando as definições das funções trigonométricas para variáveis complexas, verifique as seguintes identidades:

$$i) \operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y \quad ii) \operatorname{Re}(\cosh z) = \cosh x \cos y \quad iii) |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$iv) \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad v) \tanh(z_1 + z_2) = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2} \quad vi) \tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\sinh x + i \sin y}{\cosh x + \cos y}$$

Problema 3

A partir das condições de Cauchy-Riemman, responda os seguintes itens (considere $z = (x + iy) \in \mathbb{C}$) :

a) A função $f(z) = x^2 + 2iy^2$ é derivável em alguma região do plano complexo?

b) E a função $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$?

c) Seja $\bar{z} \in \mathbb{C}$ o complexo conjugado de z . Fazendo a substituição $x = (1/2)(z + \bar{z})$ e $y = (1/2i)(z - \bar{z})$, obtenha uma condição equivalente às de Cauchy-Riemman em termos de $\bar{z}$. Utilizando-a, faça uma nova análise da função do item (b).

Problema 4

Resolva as equações abaixo para z :

$$i) e^z = -3 \quad ii) e^z = 1 + i\sqrt{3} \quad iii) e^{2z-1} = 1.$$

Problema 5

Demonstre as seguintes identidades:

$$i) \cos^{-1} z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) \quad ii) \sin^{-1} z = -i \ln[iz \pm \sqrt{1 - z^2}] \quad iii) \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

Problema 6

Mostre que

$$i)\text{Log}(i^3) \neq 3i \quad ii)\text{Log}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i \quad iii)\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i.$$

Problema 7

Como o ramo $\log z = \ln r + i\theta$ ($r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$) da função logaritmo é analítica em cada ponto z desse domínio, a partir da identidade

$$e^{\log z} = z \quad (z \neq 0),$$

obtenha sua derivada.