

Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425):

Lista #1 - Estruturas Algébricas

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é simétrico se qualquer permutação de suas variáveis resulta em uma simetria de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- (a) Dê um exemplo de polinômio simétrico com $n = 3$;
- (b) Dê um exemplo de polinômio não-simétrico com $n = 4$;
- (c) Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um polinômio simétrico. Qual o número de simetrias de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$?

Problema 2

Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\cdot$ represente a operação de multiplicação. Mostre que $(\mathbb{Z}, \cdot)$ não é um grupo (isto é, mostre que os números inteiros não são um grupo sob a operação de multiplicação).

Problema 3

Mostre que $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é um grupo (isto é, mostre que o conjunto dos números racionais excluídos do zero é um grupo sob a operação de multiplicação).

Problema 4

Definimos o conjunto dos inteiros módulo n $\mathbb{Z}_n$ como o conjunto dos possíveis restos da divisão por n

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

a partir da operação $\%$ módulo:

$$a \% n = \text{resto da divisão } a/n.$$

Definimos a operação $+_n$ ("soma módulo n ") como

$$a +_n b = (a + b) \% n.$$

- (a) Mostre que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo (isto é, os inteiros módulo 4 são um grupo sob a operação de soma módulo 4) ;
- (b) Obtenha a tabela de adições para o grupo acima;
- (c) Verifique que ela é equivalente à tabela de composições das operações de simetria do *bumpy square*.

Problema 5

Seja G_n o conjunto das n -ésimas raízes complexas da unidade, isto é, das soluções da equação

$$z^n = 1, z \in \mathbb{C}.$$

- (a) Mostre que $(G_3, \cdot)$ é um grupo;
- (b) Mostre que $(G_4, \cdot)$ é um grupo e que sua tabela de multiplicações é equivalente à tabela de adições do grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Problema 6

Verifique que a estrutura $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, com $\mathbb{Z}_n$ representando o conjunto dos inteiros módulo n , e as operações $+_n$ e $\cdot_n$ definidas por:

$$a +_n b = (a + b) \% n$$

$$a \cdot_n b = (a \cdot b) \% n$$

constitui um anel. Ele é comutativo?

Problema 7

Mostre que a estrutura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, em que $+$ e $\cdot$ representam a soma e a multiplicação usual de números naturais, não é um anel.