Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425): Lista # 10

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

Mostre que cada par de funções satisfaz a equação diferencial a seu lado. Calcule o Wronskiano e encontre uma solução que satisfaça as condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$.
a) x e e^x; $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$.
b) e^x e e^{3x}; $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Problema 2

Mostre, que f_2 em

$$f_2(x) = f_1(x)\left\{c + K\int_{\alpha}^{x} \frac{1}{f_1^2(s)} \exp\left[-\int_{c}^{s} p(t)dt\right] ds\right\}$$

satisfaz

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

para qualquer valor de K.

Problema 3

Solucione a equação diferencial

$$y'' - y = e^x$$

utilizando o método de variação dos parâmetros.

Problema 4

Considere a equação diferencial

$$xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}$$

Verifique, por inspeção, que $f_1(x) = e^x$ é uma solução da equação homogênea associada. Utilizando o Wronskiano, obtenha uma segunda solução linearmente independente de $f_1(x)$. Utilizando o método de variação dos parâmetros, mostre que a solução geral desta equação diferencial tem a forma

$$y(x) = C_1e^x + C_2(x + 1) + \frac{(x - 1)}{2}e^{2x}.$$

Problema 5

Considere a equação diferencial

$$2y'' + 18y = 6\tan(3t).$$

Sabendo que $f_1(t) = \cos(3t)$, utilize o Wronskiano para obter que $f_2(t) = \sin(3t)$ é solução da equação homogênea associada. Utilizando o método da variação dos parâmetros, mostre que a solução geral é dada por:

$$y(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) - \frac{\cos(3t)}{3}\ln|\sec(3t) + \tan(3t)|$$

Problema 6

Encontre ao menos os 4 primeiros termos não nulos de uma expansão em série de potências em torno de $x = 0$ para uma solução geral da equação diferencial

$$z'' - x^2 z = 0.$$

Problema 7

Encontre ao menos os 4 primeiros termos não nulos de uma expansão em série de potências em torno de $x = 0$ para uma solução geral do problema de valor inicial

$$w'' + 3xw' - w = 0, \;\; w(0) = 2, \;\; w'(0) = 0.$$

Problema 8

Considere a equação diferencial

$$2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0.$$

Mostre que ela possui solução geral em série de potências em torno de $x_0 = 0$ dada por

$$y(x) = c_1 x^{1/2}\left(1 - \frac{7}{18}x + \frac{147}{792}x^2 + ...\right) + c_2 x^{-3}\left(1 - \frac{21}{5}x + \frac{49}{5}x^2 - \frac{343}{15}x^3 + ...\right).$$

Dica: As soluções da equação de índices são $r_1 = 1/2$ e $r_2 = -3$.

Problema 9

Considere a equação de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

em que ν é um parâmetro.

a) Mostre que as soluções da equação de índices são $r_1 = \nu$ e $r_2 = -\nu$.

b) Utilizando a equação de recorrência no caso em que $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, mostre que as soluções da equação de Bessel são da forma

$$y_1(x) = \left[1 - \frac{1}{2^2(1+\nu)1!}x^2 + \frac{1}{2^4(1+\nu)(2+\nu)2!}x^4 - (...)\right] x^{\nu} \equiv J_n(x).$$

e

$$y_2(x) = \left[1 - \frac{1}{2^2(1-\nu)1!}x^2 + \frac{1}{2^4(1-\nu)(2-\nu)2!}x^4 - (...)\right] x^{-\nu} \equiv J_{-n}(x).$$