Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425):
Lista #2 - Espaços Vetoriais

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

Verifique que o conjunto $\mathbb{C}^n$ com as operações usuais de soma e multiplicação de números complexos constitui um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos.

Problema 2

Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ e as seguintes operações:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(a, b) + (c, d) \to (a + c, b + d)$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\alpha \odot (a, b) \to (\alpha^2 a, \alpha^2 b).$$

A estrutura $(\mathbb{R}^2, +, \odot, \mathbb{R})$ constitui um espaço vetorial? Justifique.

Problema 3

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$. Mostre que se $\alpha v = 0$, então $\alpha = 0$ ou $v = 0$.

Problema 4

Mostre que os monômios $\{1, x, x^2, ...x^n\}$ constituem uma base para o espaço vetorial definido pelo conjunto dos $\mathbb{R}[x]$ dos polinômios reais de grau n.

Problema 5

Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{9}u_1 v_1 + \frac{1}{16}u_2 v_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Problema 6

Suponha que u, v, w são vetores tais que $\langle u, v\rangle = 3$, $\langle u, w\rangle = -4$, $\langle v, w\rangle = 7$, $||u|| = 1$, $||v|| = 2$ e $||w|| = 1$.
Calcule:
a) $\langle u + v, v + w\rangle$
b) $\langle 4v + w, 2u - v\rangle$
c) $||u + v + w||$

Problema 7

Suponha os espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e sejam u, v vetores e θ o ângulo entre eles. Encontre $\cos\theta$ para:
a) $u = (5, 2, -1)$ e $v = (4, -9, 2)$
b) $u = (1, 1, 1, 1)$ e $v = (0, 1, 0, 1)$
c) $u = (2, 0, 0, -2)$ e $v + (4, 0, 0, 0)$.