# Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425): Lista #3

*Prof. Tiago Nunes*

## Problema 1

Considere a base do espaço $\mathbb{R}^3$ definida pelos vetores $B = \{\vec{a_1} = \hat{e}_x + \hat{e}_y, \vec{a_2} = \hat{e}_x + \hat{e}_z, \vec{a_1} = \hat{e}_y + \hat{e}_z\}$.

a) Calcule a matriz métrica associada a essa base;
b) Calcule o produto interno e o ângulo entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ cujas componentes, nessa base, são, respectivamente, $(1, -1, 2)$ e $(0, 2, 3)$.

## Problema 2

Considere $V$ o espaço vetorial definido pelo conjunto $\mathbb{R}_1[t]$ dos polinômios reais de grau menor ou igual à 1 sobre o corpo dos Reais. Considere ainda a base de $V$ definida por $B = \{1, t\}$.

a) Sendo $(a, b)$ um intervalo nos reais, e $\vec{f} \equiv f(t), \vec{g} \equiv g(t) \in \mathbb{R}_1[t]$ dois vetores em $V$, verifique que

$$\vec{f} \cdot \vec{g} \equiv \int_a^b f(t)g(t)dt \tag{1}$$

possui todas as propriedades necessárias para definir um produto interno para $V$.
b) Calcule as componentes da matriz métrica para a base $B$.
c) Encontre o módulo dos vetores da base $B$ e o ângulo entre eles.
d) Sejam $\vec{f} \equiv f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ e $\vec{g} \equiv g(t) = \beta_0 + \beta_1 t$. Calcule o produto interno $\vec{f} \cdot g$ utilizando diretamente a definição da Equação 1 e também utilizando a matriz métrica. Verifique que o mesmo resultado é produzido nos dois casos.

## Problema 3

A matriz de produto interno em uma base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule o cosseno do ângulo entre $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$.
b) Suponha que $\vec{a} = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ e que $\vec{b} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Calcule $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b}$ e o cosseno do ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

## Problema 4

Sendo $\epsilon_{ijk}$ o símbolo de Levi-Civita e $\delta_{ij}$ o delta de Kroenecker, mostre que:

- $\delta^i_i = 3$
- $\delta^{ij}\epsilon_{ijk} = 0$
- $\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta^i_l\delta^j_m\delta^k_n + \delta^i_m\delta^j_n\delta^k_l + \delta^i_n\delta^j_l\delta^k_m - \delta^i_m\delta^j_l\delta^k_n - \delta^i_n\delta^j_m\delta^k_l - \delta^i_l\delta^j_n\delta^k_m$
- $\epsilon^{ijk}\epsilon_{imn} = \delta^j_m\delta^k_n - \delta^j_n\delta^k_m$
- $\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta^k_l$
- $\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

## Problema 5

A Figura 3-5 da página 134 do livro referência de Arfken-Weber-Harris corresponde a um exemplo exibido em sala de aula. Em sala, encontramos a matriz de transformação $A$ tal que $\vec{a}' = A\vec{a}$. Determine a matriz da transformação inversa $B$ tal que $\vec{a} = A\vec{a}'$. Mostre que $B$ é uma matriz ortogonal, isso é, $B^t B = \mathbb{I}$.

## Problema 6

Verifique que se $A$ e $B$ são matrizes ortogonais, então $(AB)$ também é ortogonal.

## Problema 7

Mostre que a matriz de rotação de Euler (use a parametrização de sua preferência) é ortogonal.

## Problema 8

Exercícios adicionais do livro referência Arfken-Weber-Harris, 7a Edição: 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.8, 3.2.13, 3.2.14, 3.3.1, 3.3.4, 3.3.5, 3.4.1