Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425): Lista #7

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

Utilizando a expressão para a n-ésima derivada de uma função analítica obtida a partir da fórmula integral de Cauchy:
a) Calcule df/dz para $f(z) = z^2$;
b) Mostre que, em geral, $(d/dz)z^m = mz^{m-1}$.

Problema 2

Calcule a integral $\int_C [(z+2)/z]dz$, em que C é
a) o semi-círculo $z = 2e^{i\theta}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$;
b) o semi-círculo $z = 2e^{i\theta}$ com $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;
c) o círculo $z = 2e^{i\theta}$ com $-\pi \leq \theta \leq \pi$;

Problema 3

Calcule as seguintes integrais:
a) $\int_\gamma z^2 dz$ com γ o segmento de reta que liga a origem ao ponto $1 + 2i$;
b) $\int_\gamma z^2 dz$ com γ a união entre o segmento de reta que liga a origem ao ponto 1 e o segmento de reta que liga esse ponto à $1 + 2i$;
c) $\int_\gamma dz/(z - 1 - i)$ com γ a linha que une o ponto $z_1 = 2i$ ao ponto $z_2 = 3$.
d) $\int_\gamma dz/(z - 1 - i)$ com γ a linha que une o ponto $z_1 = 2i$ à origem e a linha que liga a origem ao ponto $z_2 = 3$;

Problema 4

Utilizando a fórmula integral de Cauchy, calcule:
a) $\oint_C \frac{dz}{z(z+2)}$ com C a circunferência de raio unitário centrada na origem;
b) $\oint_C \frac{dz}{4z^2-1}$ com C a circunferência de raio unitário centrada na origem;
c) $\oint_C \frac{\sin^z - z^2}{(z-a)^3} dz$, em que C é um contorno que contém o ponto a em seu interior;
d) $\oint_C \frac{f(z)}{z(2z+1)^2} dz$, com C a circunferência de raio unitário centrada na origem;

Problema 5

a) Seja C_1 um contorno fechado simples no plano complexo. Deforme C_1 em um novo contorno C_2 de modo que você não cruze nenhuma singularidade de uma função analítica f no processo. Mostre que

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

b) Utilize o resultado acima para mostrar que

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^m} = \begin{cases} 2\pi i \text{ , se } m = 1 \\ 0 \text{ , se } m > 1 \end{cases}$$

em que C é um contorno qualquer tal que z_0 está localizado em seu interior.

Problema 6

a) Expanda $f(z) = \sinh z$ em série de Taylor ao redor do ponto $z = i\pi$.
b) Encontre a expansão em série de Taylor de $f(z) = 1/z^2$ para pontos no círculo $|z-2|< 2$.
c) Encontre a expansão em séries de Taylor ao redor do ponto $z_0 = -2\pi i$ e de Maclaurin para a função $f(z) = \cosh z$.

Problema 7

Calcule as seguintes integrais considerando que C é a circunferência $|z-i|= 3$ e ela é percorrida no sentido positivo.

a)
$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+\pi^2}dz,$$

b)
$$\oint_C \frac{\sinh z}{(z^2+\pi^2)^2}dz,$$

c)
$$\oint_C \frac{dz}{z^2+9}dz,$$

d)
$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+9)^2}dz$$

e)
$$\oint_C \frac{z^2-3z+4}{z^2-4z+3}dz.$$