

Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425):

Lista # 9

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

Separe a solução da equação do calor na forma $T(\vec{r}, t) \equiv R(\vec{r})\tau(t)$. Mostre que

a) a solução da equação temporal é da forma

$$\tau(t) = Ae^{-\alpha k^2 t}.$$

b) nesse caso, a solução espacial satisfaz a EPD: $\nabla^2 R + \alpha R = 0$.

Problema 2

Separe a solução da equação de onda na forma $\psi(\vec{r}, t) \equiv R(\vec{r})T(t)$. Mostre que:

a) a solução para a equação temporal é

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

b) a parte espacial satisfaz a EDP: $\nabla^2 R + k^2 R = 0$, com $k = \omega/c$.

Problema 3

Considere a equação de Helmholtz em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0.$$

Encontre sua solução dentro do paralelepípedo definido pelos planos $x = 0$, $x = c$, $y = 0$, $y = c$, $z = 0$, $z = L$, com a condição de contorno de Dirichlet $\psi = 0$ em todas as fronteiras do paralelepípedo, exceto em $z = L$. Nessa fronteira, $\psi = V$, com V uma constante.

Problema 4

Considere uma partícula de massa m presa em uma caixa definida pelas superfícies $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = z$. Os estados quânticos estacionários desse sistema são as autofunções da equação de Schrödinger

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z),$$

sujeita à condição de contorno de Dirichlet $\psi = 0$ em todas as superfícies da caixa. Em um sistema de unidades em que $m = \hbar = 1$, E é a energia do estado estacionário. Com essas condições de contorno, a EDP possui soluções apenas para valores discretos de E . Encontre esses valores e suas autofunções correspondentes.

Problema 5

Verifique que

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + \left[k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\theta) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0$$

é separável em coordenadas esféricas.

Problema 6

Leia a seção 9.7 do livro-texto Arfken, Weber & Harris e refaça os exemplos 9.7.2 e 9.7.3 (numeração correspondente à sétima edição).