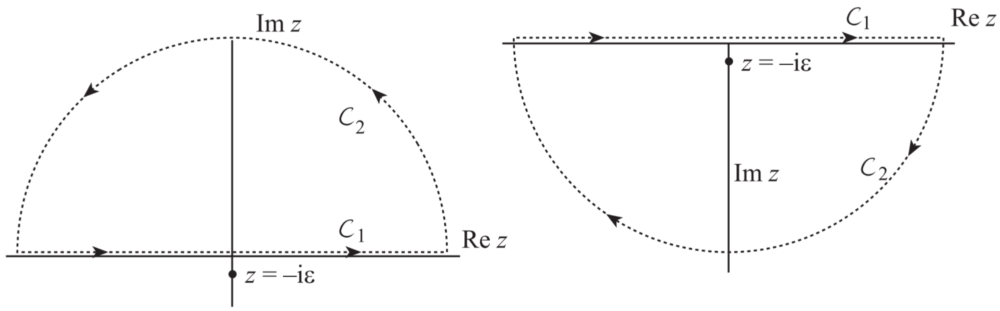
Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425): Problemas Extras - P2

Prof. Tiago Nunes



Problema 1

Considere a seguinte função de uma variável real t

$$F(t) = \frac{i}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} dz,$$

em que o contorno $\mathcal{C}$ é composto por $\mathcal{C}_1$, que é o eixo real de $-R$ até $+R$, e $\mathcal{C}_2$, que é a semi-circunferência de R centrada na origem, que pode ser tomada no eixo superior ou inferior do plano complexo, como na figura.

a) Escrevendo $z \in \mathcal{C}_2$ em sua forma polar, mostre que, caso $t < 0$, a contribuição de $\mathcal{C}_2$ para a integral se anula, no limite $R \to \infty$, se $\theta > 0$ (isso é, tomando $\mathcal{C}_2$ no semi-plano superior). Mostre que, caso $t > 0$, a contribuição de $\mathcal{C}_2$ para a integral, no limite $R \to \infty$, se anula para $\theta < 0$ (ou seja, tomando $\mathcal{C}_2$ no semi-plano inferior).
b) Utilizando os resultados do item anterior, mostre que:

$$\theta(t) \equiv \begin{cases} 0, \text{se } t < 0 \\ 1, \text{se } t > 0 \end{cases} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} dz.$$

Problema 2

Explique e derive a fórmula de Stirling para a função gama.