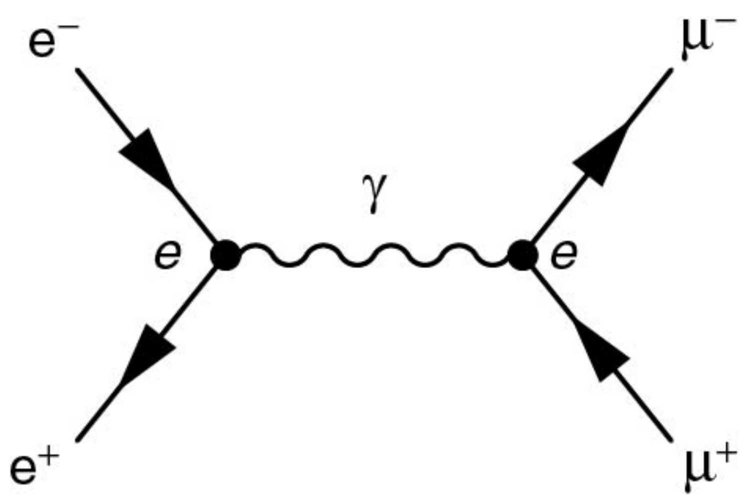
ANIQUILAÇÃO

$$e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$$

CÁLCULOS EM QED

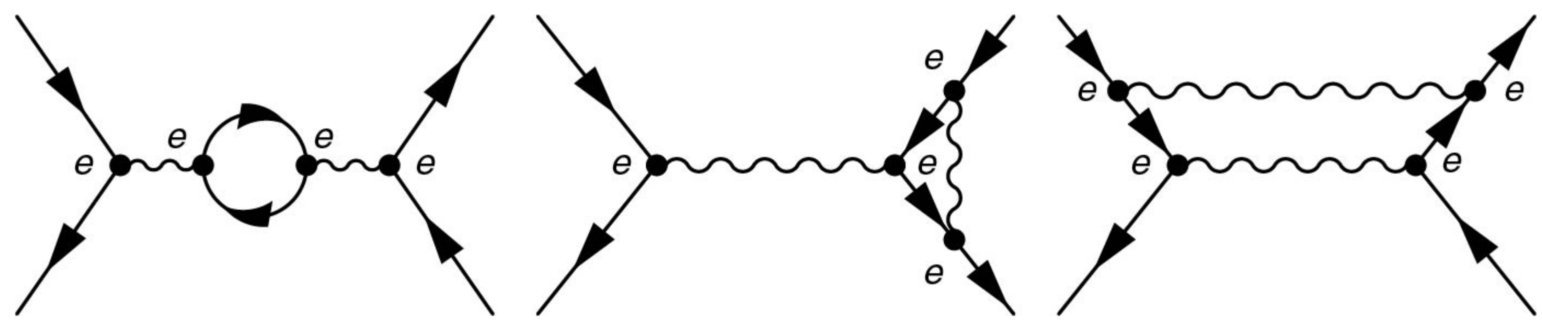
- A contribuição dominante p/ seção de choque ou taxa de decaimento é tipicamente o diagrama de Feynman com o número mais baixo de vértices de interação (ordem mais baixa - *L.O.*);

$$e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$$



$$|\mathcal{M}|^2 \propto \alpha^2 = (\frac{e^2}{4\pi})^2$$

Leading Order (LO)



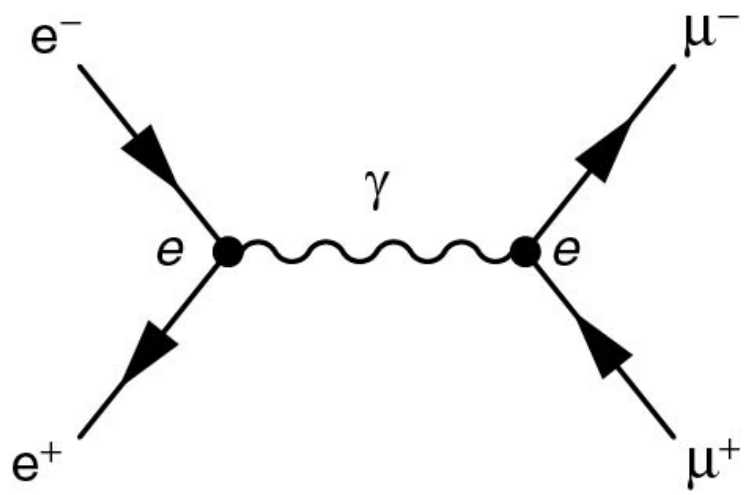
$$|\mathcal{M}|^2 \propto \alpha^4 = (\frac{e^2}{4\pi})^4$$

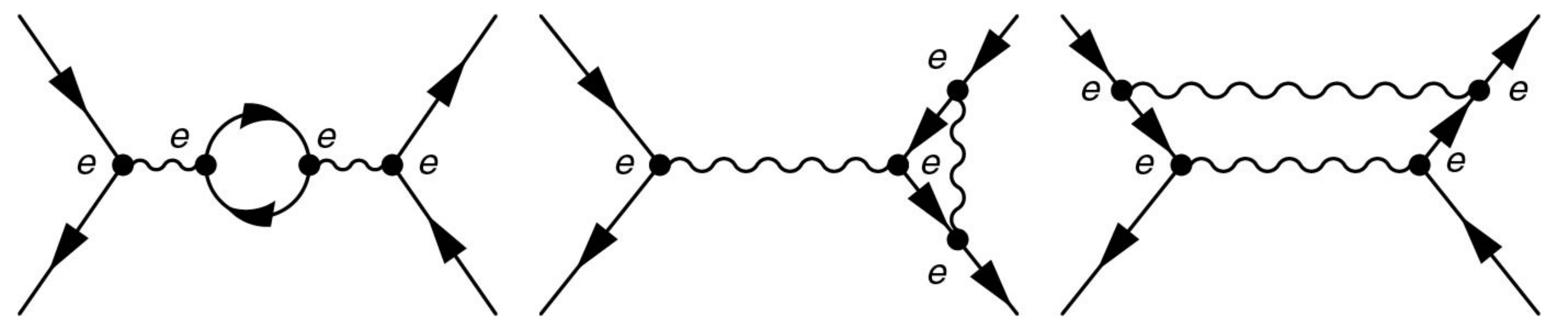
Next-to-leading order (NLO)

- A contribuição de cada termo pode ser calculada utilizando as regras de Feynman.

CÁLCULOS EM QED

$$e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$$





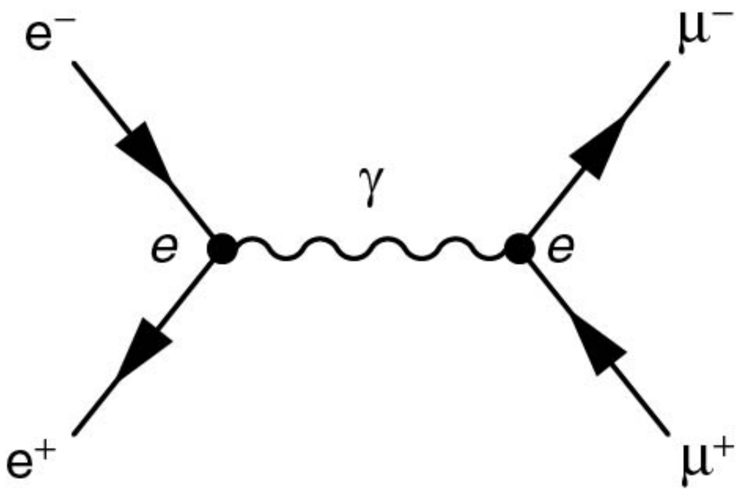
$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{LO} + \sum_j \mathcal{M}_{NLO,j} + (\ldots)$$

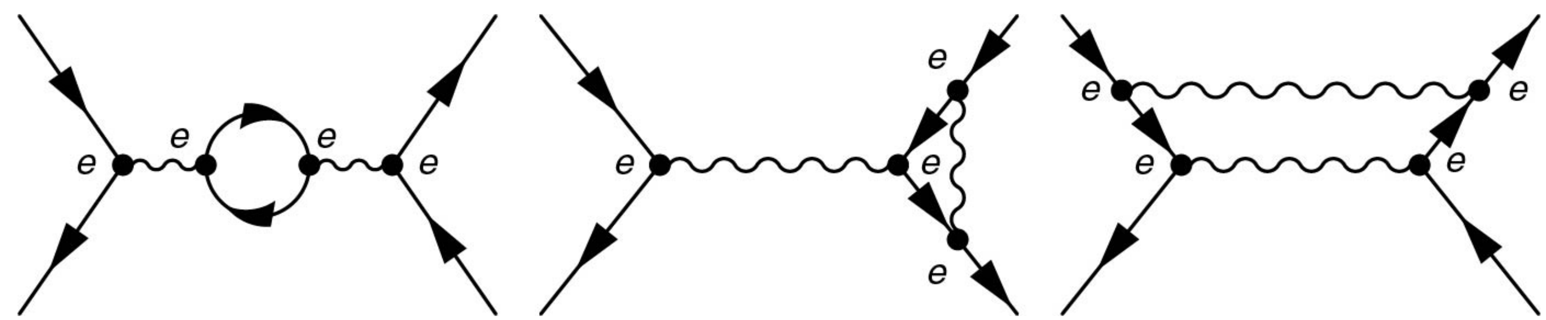
Fatorando a dependência em **α** para cada termo:

$$\mathcal{M}_{fi} = \alpha\mathcal{M}_{LO} + \alpha^2 \sum_j \mathcal{M}_{NLO,j} + (\ldots)$$

CÁLCULOS EM QED

$$e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$$





$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{LO} + \sum_j \mathcal{M}_{NLO,j} + (\ldots)$$

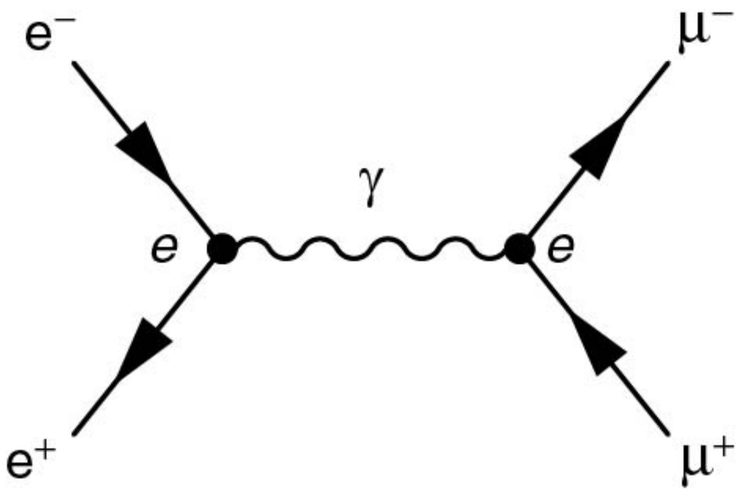
Fatorando a dependência em **α** para cada termo:

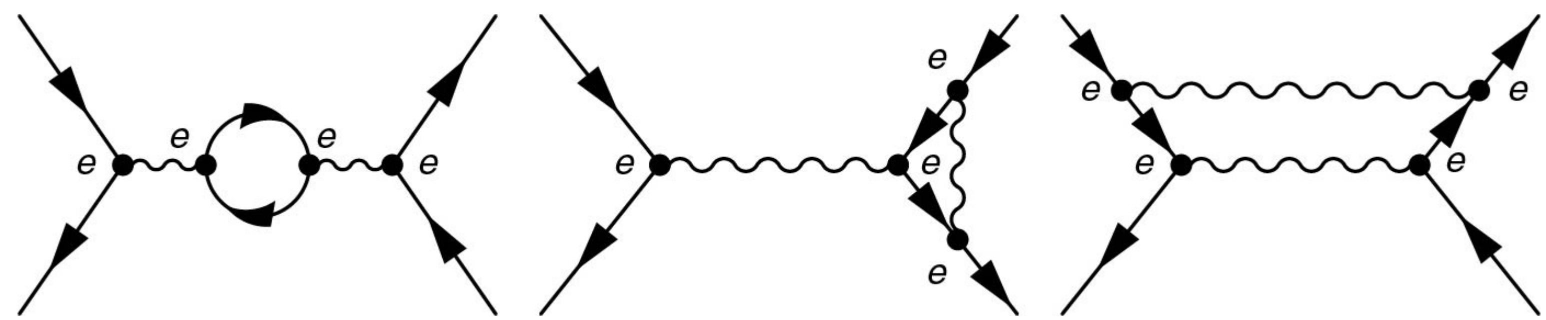
$$\mathcal{M}_{fi} = \alpha \mathcal{M}_{LO} + \alpha^2 \sum_j \mathcal{M}_{NLO,j} + (\ldots)$$

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \left(\alpha \mathcal{M}_{LO} + \alpha^2 \sum_j \mathcal{M}_{NLO,j} + (\ldots)\right)\left(\alpha \mathcal{M}^*_{LO} + \alpha^2 \sum_j \mathcal{M}^*_{NLO,j} + (\ldots)\right)$$

CÁLCULOS EM QED

$$e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$$



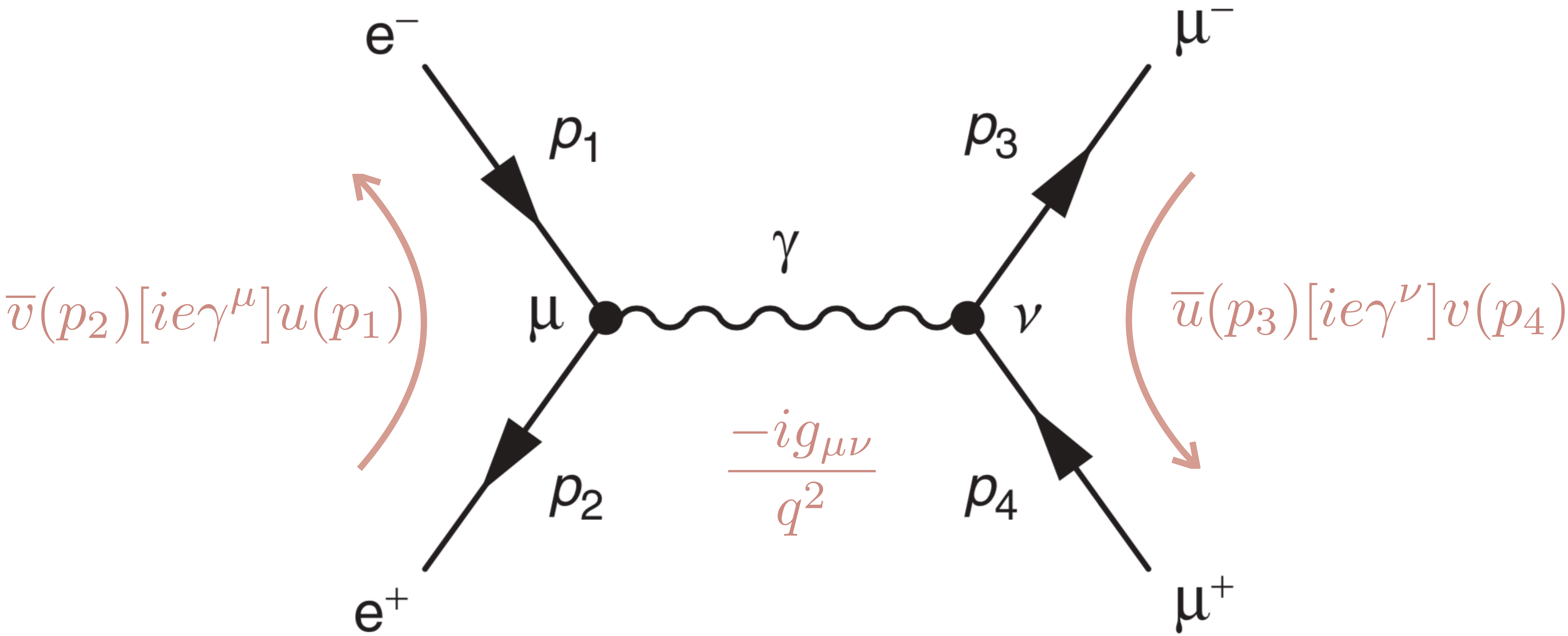


$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{LO} + \sum_j \mathcal{M}_{NLO,j} + (\ldots)$$

Fatorando a dependência em **α** para cada termo:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \alpha^2 |\mathcal{M}_{LO}|^2 + \alpha^3 \sum_j (\mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}^*_{NLO,j} + \mathcal{M}^*_{LO}\mathcal{M}^{NLO,j}) + \alpha^4(\ldots)$$

Supressão por fator (1/137)! Usaremos apenas os termos LO (erro ~1%)



$$-i\mathcal{M} = [\overline{v}(p_2)\{ie\gamma^\mu\}u(p1)]\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}[\overline{u}(p_3)\{ie\gamma^\nu\}v(p4)]$$

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{q^2}g_{\mu\nu}\left[\overline{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)\right]$$

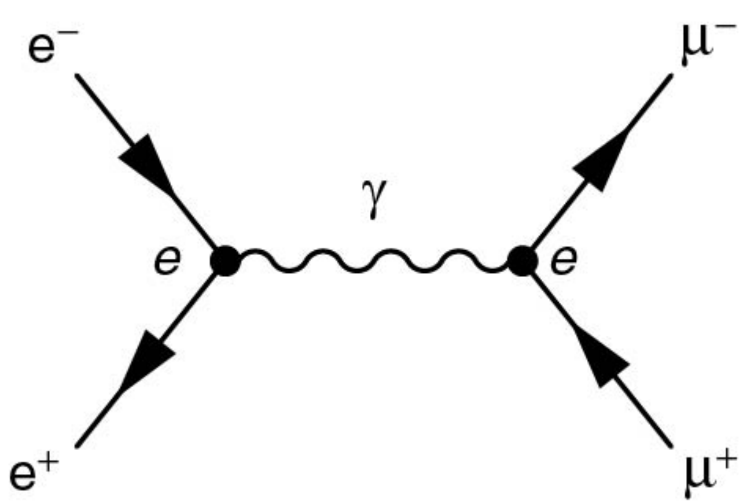
ELEMENTO DE MATRIZ

Já calculamos em sala o elemento de matriz para o diagrama LO:

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{q^2} g_{\mu\nu} \left[\overline{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)\right]$$
$$= -\frac{e^2}{q^2} g_{\mu\nu} j_e^\mu j_\mu^\nu$$

Com as 4-correntes do elétron e do múon definidas como:

$$j_e^\mu = \overline{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \qquad j_\mu^\nu = \overline{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)$$



Note que:

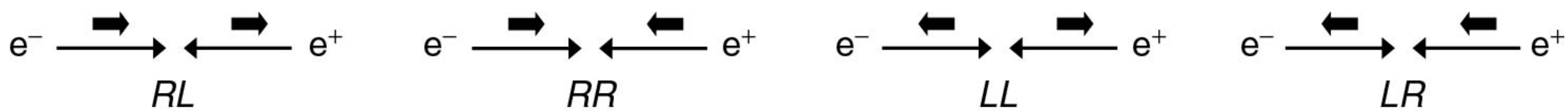
$$q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

$$\Rightarrow q^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$$ → (Energia do C.M.)²

$$\Rightarrow \mathcal{M} = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu$$ → Invariante de Lorentz

SOMA SOBRE SPINS

- Precisamos levar em conta todos os possíveis estados de spin das partículas envolvidas.
- 4 combinações possíveis no estado inicial:



- 4 combinações análogas possíveis no estado final;
- 16 possíveis combinações de helicidade. Ex: RL→RR, RL→RL, etc.
- Somamos sobre as 16 configurações possíveis e tiramos a média sobre o número de estados iniciais de helicidade:

$$\langle|\mathcal{M}|\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_i| = \frac{1}{4}(|\mathcal{M}_{LL\to LL}|^2 + |\mathcal{M}_{LL\to LR}|^2 + ...)$$

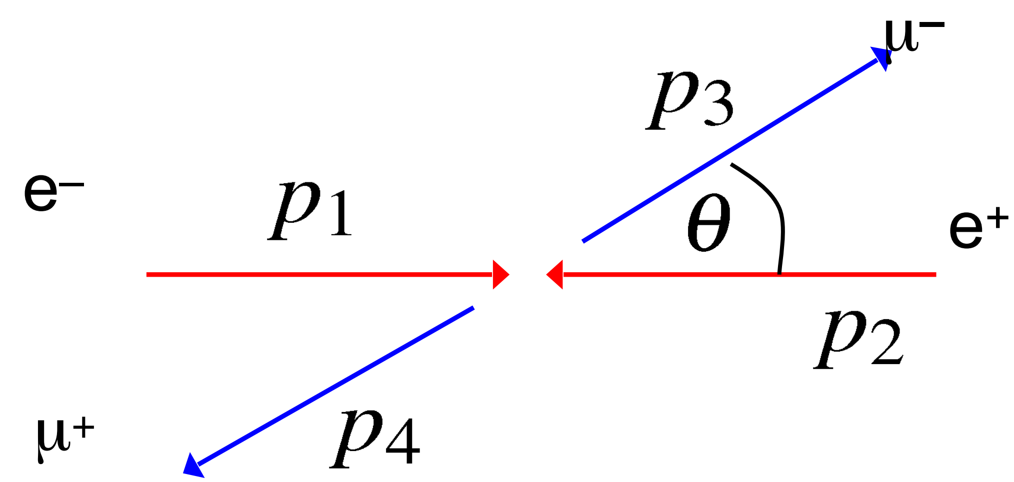
Ou seja, precisamos calcular $\mathcal{M} = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu$ para as 16 combinações!!!

Para nossa sorte, no limite $\sqrt{s} >> m_\mu$ apenas 4 combinações são não-nulas.

AUTO-ESTADOS DE HELICIDADE

No limite E >> m:

$$p_1 = (E, 0, 0, E)$$
$$p_2 = (E, 0, 0, -E)$$
$$p_3 = (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta)$$
$$p_4 = (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta)$$



(Assumimos que o estado final é formado com ângulos azimutais 0 e π).

Os espinores que aparecem nas correntes são os auto-estados de helicidade:

$$u_\uparrow = N\begin{pmatrix} c \\ e^{i\phi}s \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m}c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m}e^{i\phi}s \end{pmatrix} \quad u_\downarrow = N\begin{pmatrix} -s \\ e^{i\phi}c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m}s \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m}e^{i\phi}c \end{pmatrix} \quad v_\uparrow = N\begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m}s \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m}e^{i\phi}c \\ -s \\ e^{i\phi}c \end{pmatrix} \quad v_\downarrow = N\begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m}c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m}e^{i\phi}s \\ c \\ e^{i\phi}s \end{pmatrix}$$

$$s = \sin(\theta/2), c = \cos(\theta/2), N = \sqrt{E+m}$$

No limite acima:

$$\boxed{u_\uparrow = \sqrt{E}\begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix};\ u_\downarrow = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix};\ v_\uparrow = \sqrt{E}\begin{pmatrix} s \\ -ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{pmatrix};\ v_\downarrow = \sqrt{E}\begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix}}$$

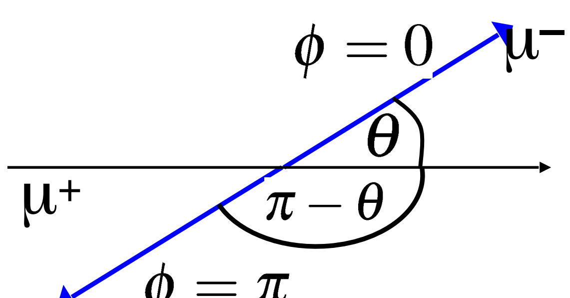
COMBINAÇÕES DE HELICIDADE

$$e^- \text{ inicial } (\theta = 0, \phi = 0) \qquad e^+ \text{ inicial } (\theta = \pi, \phi = \pi)$$

$$u_\uparrow(p_1) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ u_\downarrow(p_1) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}; \qquad v_\uparrow(p_2) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix};\ v_\downarrow(p_2) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mu^- \text{ final } (\phi = 0) \qquad \mu^+ \text{ final } (\phi = \pi, \theta \to \pi - \theta)$$

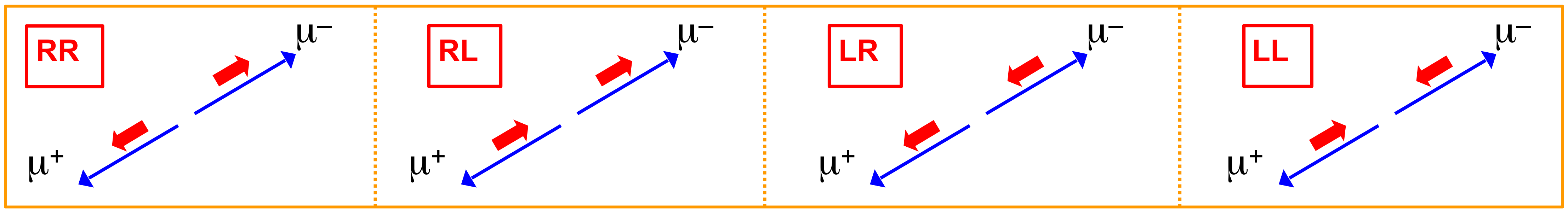
$$u_\uparrow(p_3) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}c\\s\\c\\s\end{pmatrix};\ u_\downarrow(p_3) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}-s\\c\\s\\-c\end{pmatrix}; \qquad v_\uparrow(p_4) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}c\\s\\-c\\-s\end{pmatrix};\ v_\downarrow(p_4) = \sqrt{E}\begin{pmatrix}s\\-c\\s\\-c\end{pmatrix};$$



$$\left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\pi} = -1 \end{array}\right.$$

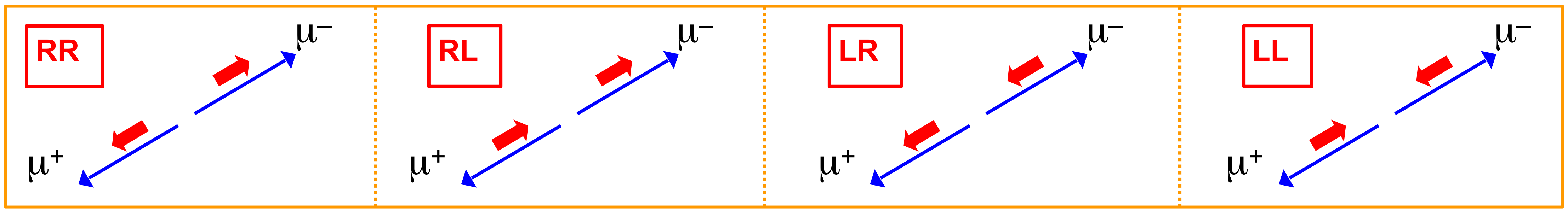
A CORRENTE DO MÚON

Para calcular $\mathcal{M} = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu$ consideremos a 4-corrente $j_\mu^\nu = \overline{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)$ para as 4 combinações possíveis de helicidade:



A CORRENTE DO MÚON

Para calcular $\mathcal{M} = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu$ consideremos a 4-corrente $j^\nu_\mu = \overline{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)$ para as 4 combinações possíveis de helicidade:



Sendo **Φ** e **ψ** espinores quaisquer, podemos utilizar a forma explícita das matrizes **γ** para calcular as componentes:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

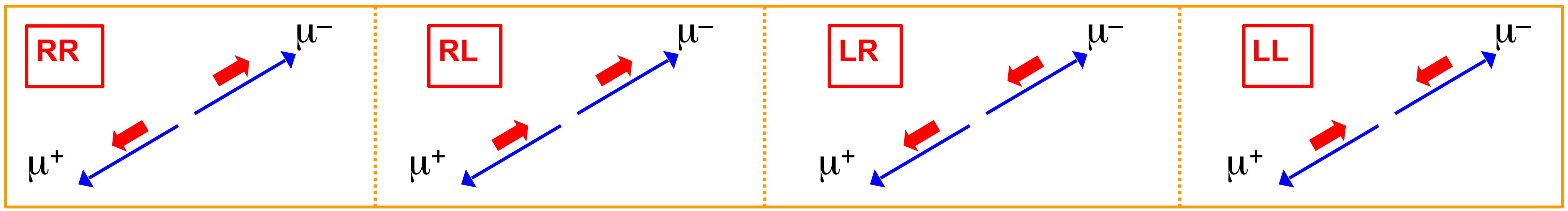
$$\overline{\psi}\gamma^0\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi$$

$$= \psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \phi$$

$$= \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4$$

A CORRENTE DO MÚON

Para calcular $\mathcal{M} = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu$ consideremos a 4-corrente $j_\mu^\nu = \overline{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)$ para as 4 combinações possíveis de helicidade:



Sendo **Φ** e **ψ** espinores quaisquer, podemos utilizar a forma explícita das matrizes **γ** para calcular as componentes:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^0\phi &= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4 \\
\overline{\psi}\gamma^1\phi &= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1 \\
\overline{\psi}\gamma^2\phi &= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1) \\
\overline{\psi}\gamma^3\phi &= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 - \psi_4^*\phi_2
\end{aligned}$$

A CORRENTE DO MÚON

Considere a combinação final $\mu_R^- + \mu_L^+$ com $\psi = u_\uparrow, \phi = v_\downarrow$,

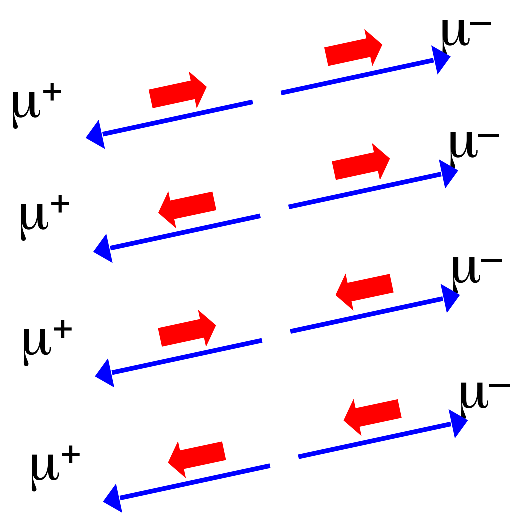
$$v_\downarrow = \sqrt{E}\begin{pmatrix} s \\ -c \\ s \\ -c \end{pmatrix};\ u_\uparrow = \sqrt{E}\begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^0 v_\downarrow(p_4) &= E(cs - sc + cs - sc) = 0 \\ \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^1 v_\downarrow(p_4) &= E(-c^2 + s^2 - c^2 + s^2) = 2E(s^2 - c^2) = -2E\cos\theta \\ \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^2 v_\downarrow(p_4) &= -iE(-c^2 - s^2 - c^2 - s^2) = 2iE \\ \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^3 v_\downarrow(p_4) &= E(cs + sc + cs + sc) = 4Esc = 2E\sin\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) = 2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta)}$$

A CORRENTE DO MÚON (COMBINAÇÕES DE HELICIDADE)

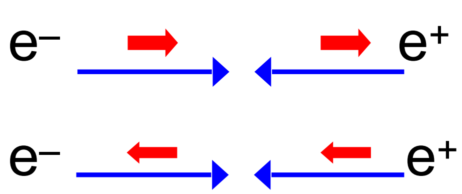
Repetindo o procedimento para as 4 combinações:



$$\begin{aligned}
\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) &= 2E(0,-\cos\theta,i,\sin\theta) && \textbf{RL}\\
\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) &= (0,0,0,0) && \textbf{RR}\\
\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) &= (0,0,0,0) && \textbf{LL}\\
\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) &= 2E(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta) && \textbf{LR}
\end{aligned}$$

No limite E >> m, apenas duas combinações finais de helicidade são não-nulas!

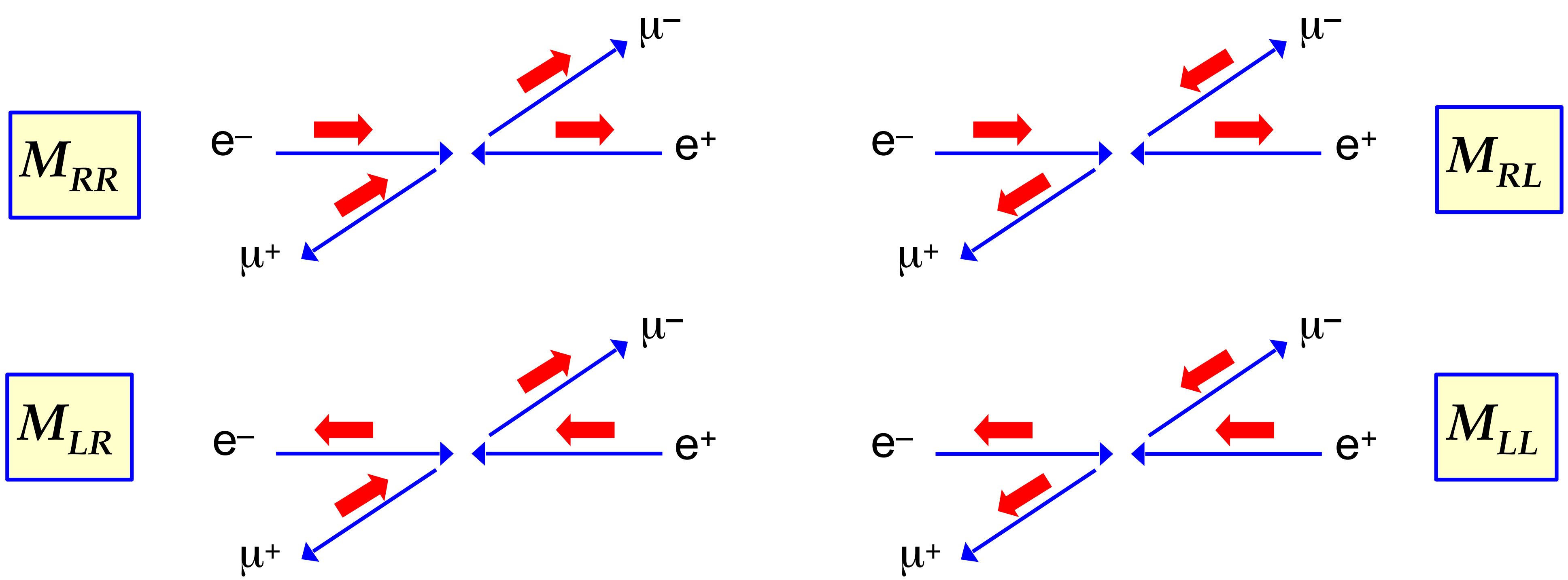
De maneira similar, para a corrente do elétron:



$$\begin{aligned}
e^-_R e^+_L \;:&\quad \bar{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\nu u_\uparrow(p_1) = 2E(0,-1,-i,0)\\
e^-_L e^+_R \;:&\quad \bar{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\nu u_\downarrow(p_1) = 2E(0,-1,i,0)
\end{aligned}$$

ELEMENTOS DE MATRIZ

Precisamos, então, calcular 4 elementos de matriz:



Notação: o elemento de matriz de $e^-_R + e^+_L \to \mu^-_R + \mu^+_L$ é escrito M_{RR}

Para esse processo: $e^-_R e^+_L \;:\quad (j_e)^\mu = \bar{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) \;=\; 2E(0,-1,-i,0)$

$\mu^-_R \mu^+_L \;:\quad (j_\mu)^\nu = \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) \;=\; 2E(0,-\cos\theta, i, \sin\theta)$

Finalmente:
$$\begin{aligned} M_{RR} &= -\frac{e^2}{s}\,[2E(0,-1,-i,0)]\,.\,[2E(0,-\cos\theta,i,\sin\theta)] \\ &= -e^2(1+\cos\theta) \\ &= -4\pi\alpha(1+\cos\theta) \end{aligned}$$

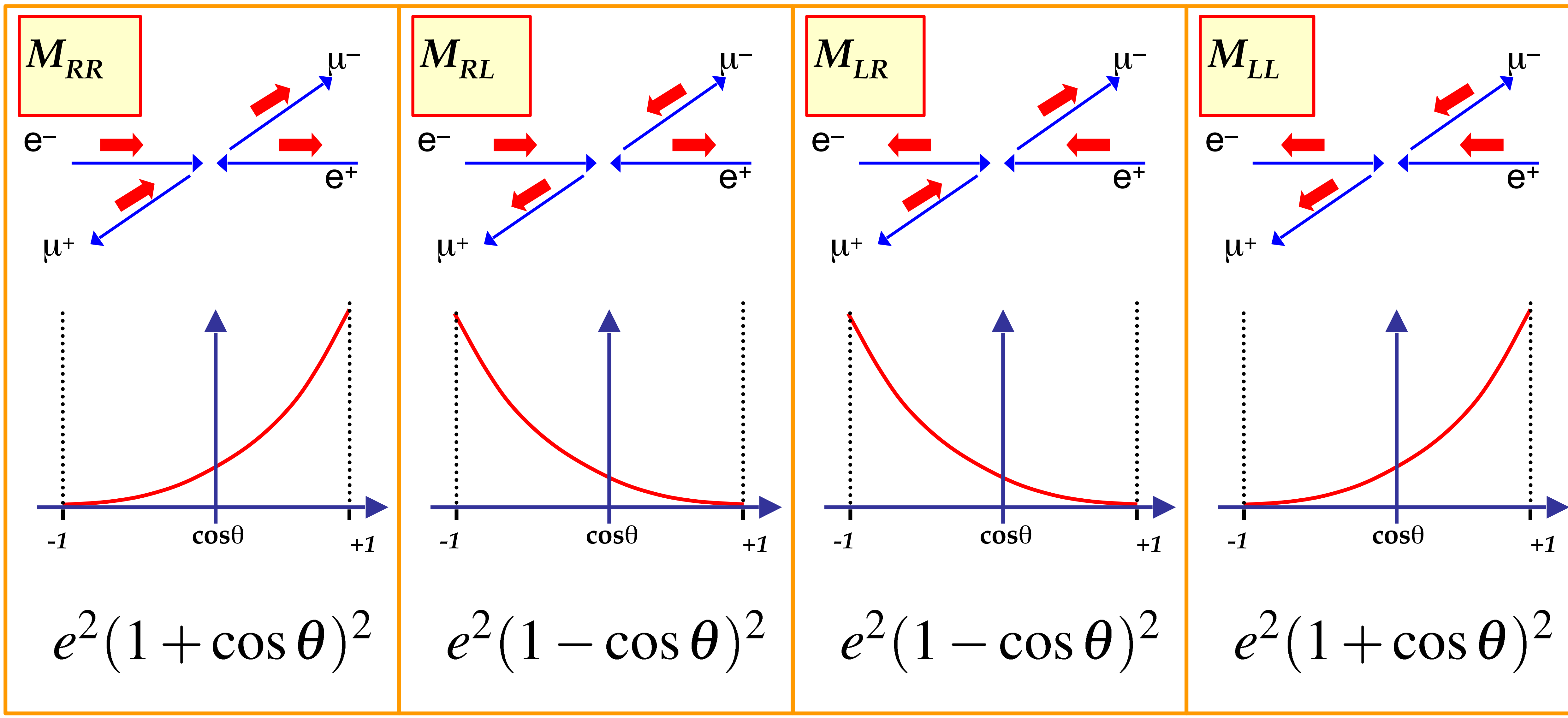
$\boxed{s = (p_1+p_2)^2 = (E+E)^2 = 4E^2}$

$\boxed{\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137}$

AMPLITUDES

Então:

$$|M_{RR}|^2 = |M_{LL}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1+\cos\theta)^2$$
$$|M_{RL}|^2 = |M_{LR}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1-\cos\theta)^2$$

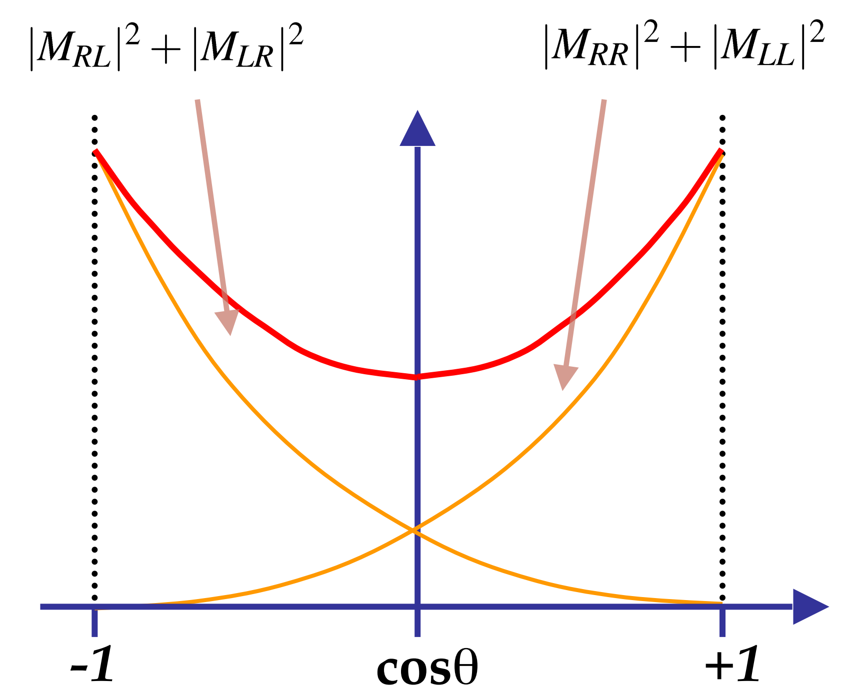


SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL

A seção de choque é obtida através da média sobre estados iniciais e da soma sobre estados finais:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{64\pi^2 s}(|M_{RR}|^2 + |M_{RL}|^2 + |M_{LR}|^2 + |M_{LL}^2|) \\ &= \frac{(4\pi\alpha)^2}{256\pi^2 s}(2(1+\cos\theta)^2 + 2(1-\cos\theta)^2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta)}$$



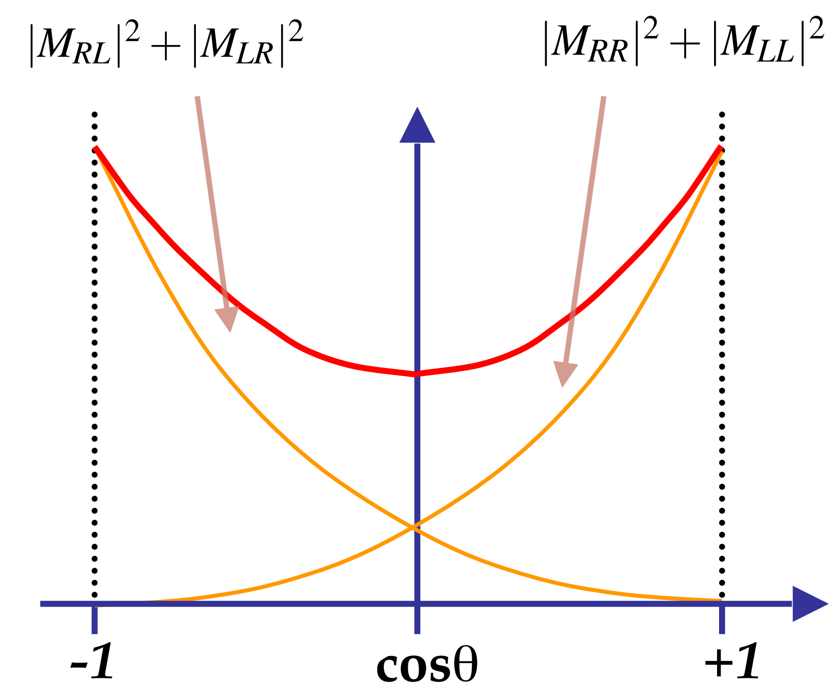
SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL

A seção de choque é obtida através da média sobre estados iniciais e da soma sobre estados finais:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{64\pi^2 s}\left(|M_{RR}|^2+|M_{RL}|^2+|M_{LR}|^2+|M_{LL}^2|\right)$$

$$= \frac{(4\pi\alpha)^2}{256\pi^2 s}\left(2(1+\cos\theta)^2+2(1-\cos\theta)^2\right)$$

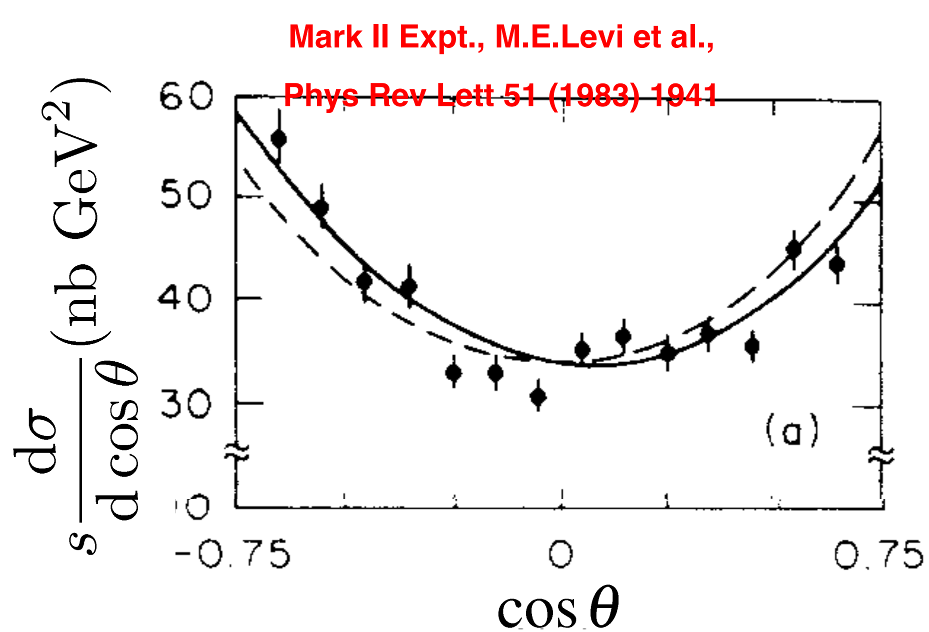
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta)}$$



Experimento Mark II: M.E.Levi et al., PRL 51 (1983) 1941

$$e_R^- + e_L^+ \to \mu_R^- + \mu_L^+$$

$$\sqrt{s} = 29\ \text{GeV}$$



----- QED pura, $\mathcal{O}(\alpha^3)$

—— QED mais Z

SEÇÃO DE CHOQUE INTEGRAL

A seção de choque total é obtida integrando sobre **θ** e **ϕ**:

$$\int (1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} (1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta = \frac{16\pi}{3}$$

Finalmente, a seção de choque total para o processo $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ é:

$$\boxed{\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}$$

SEÇÃO DE CHOQUE INTEGRAL

A seção de choque total é obtida integrando sobre **θ** e **ϕ**:

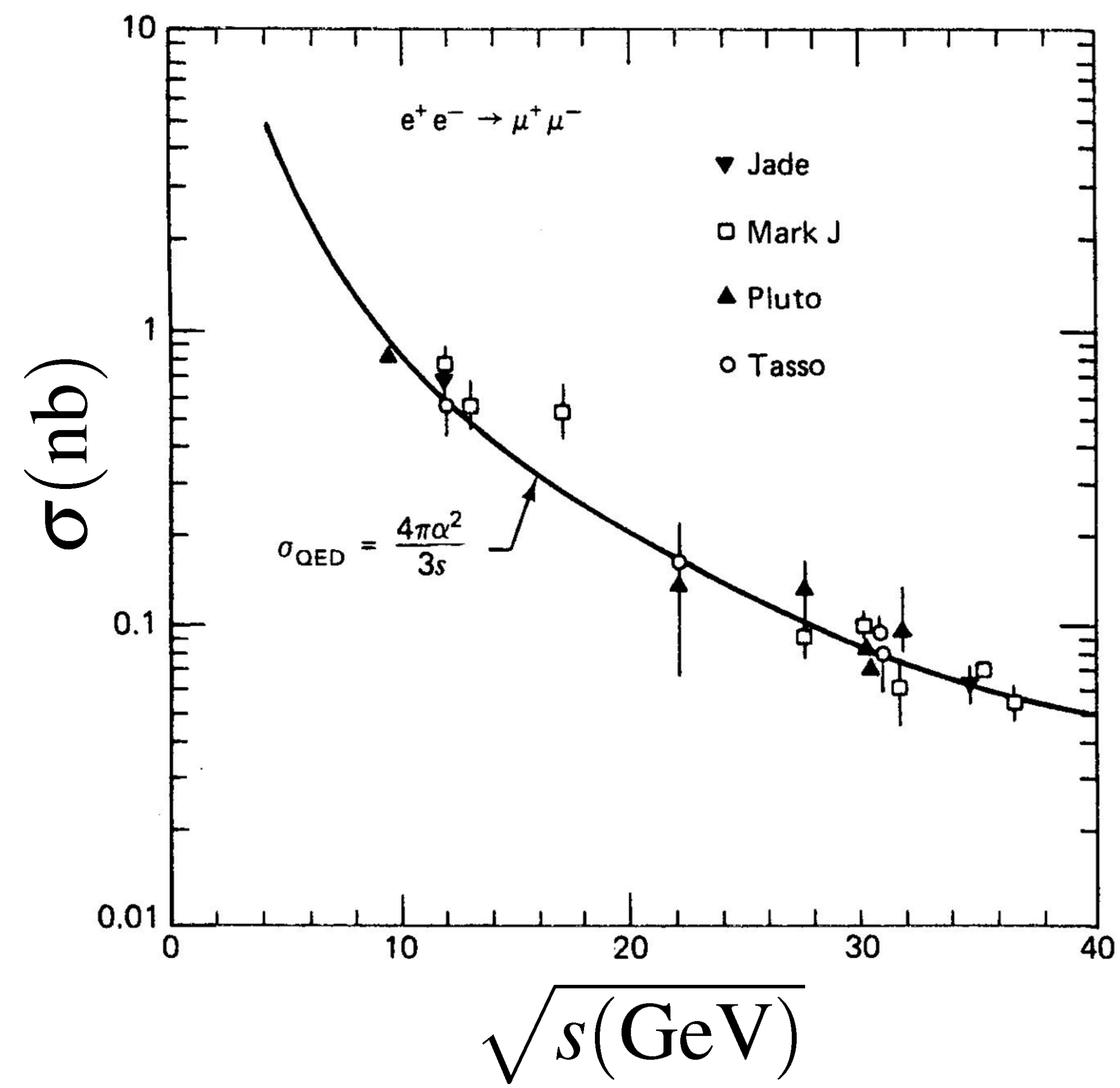
$$\int (1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} (1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta = \frac{16\pi}{3}$$

Finalmente, a seção de choque total para o processo $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ é:

$$\boxed{\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}$$

O cálculo em LO já descreve bem os dados experimentais!!!!!

Obtivemos, a partir de primeiros princípios, a seção de choque da aniquilação elétron-pósitron, com erro ~1%.



MEDIDAS EM COLISORES

COLISORES

Colisores são caracterizados, primariamente, por sua energia de centro de massa e sua luminosidade.

A luminosidade instantânea L caracteriza a taxa de eventos:

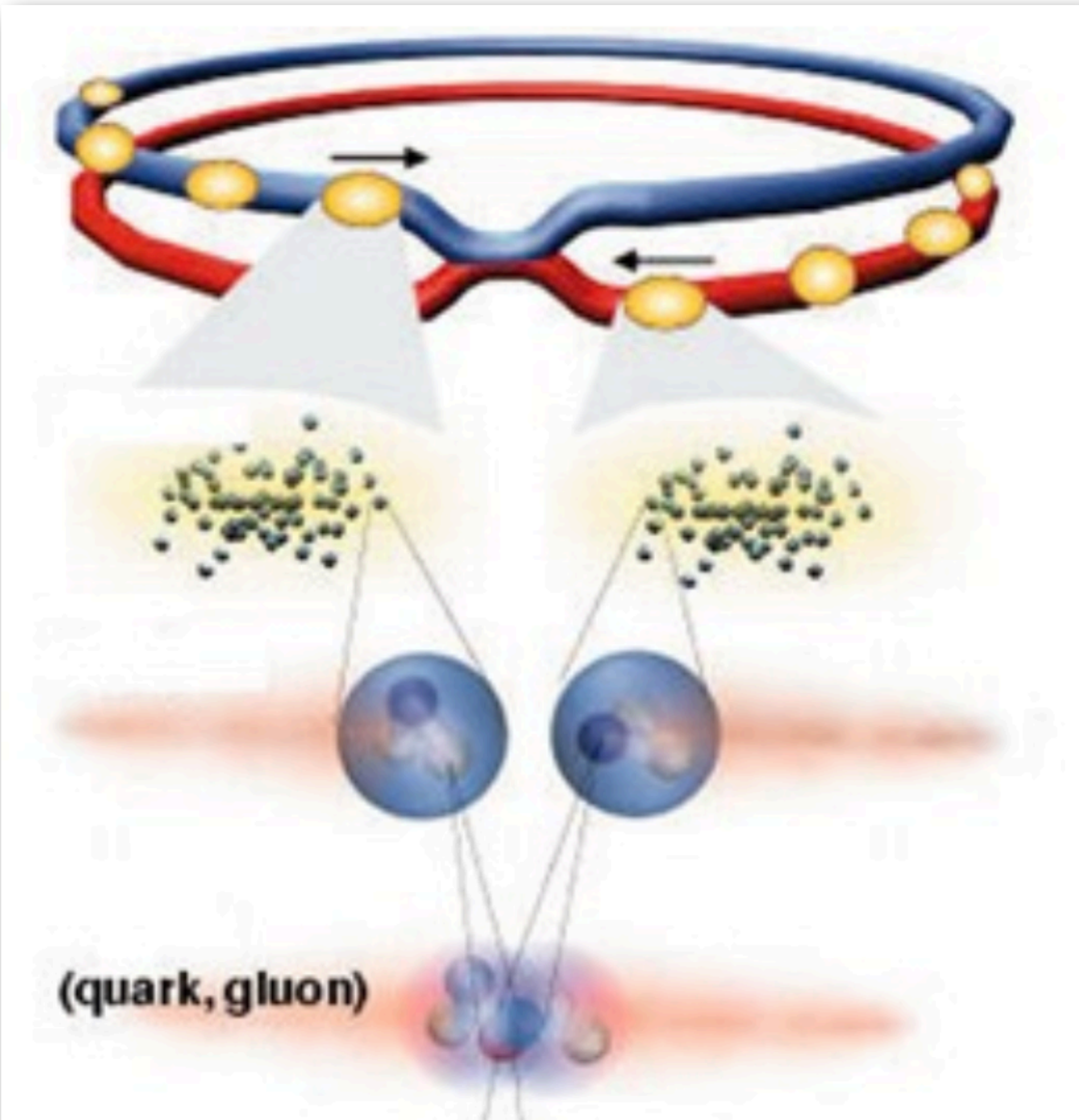
$$N = \sigma \int L(t) dt$$

Número de interações

Seção de choque

Luminosidade Instantânea

LUMINOSIDADE INSTANTÂNEA



Assumindo um perfil gaussiano para os feixes, a luminosidade instantânea é expressa como:

$$L = f\,\frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y}$$

n → número de partículas num *bunch*

f → freqüência dos *bunches*

σ → tamanho dos feixes

UNIDADES

Unidade usual de luminosidade instantânea: **$cm^{-2}s^{-1}$**

Unidade usual de **σ** em física nuclear e de partículas: 1 **barn** (bn) = $10^{-28}m^2$ = 10 fm x 10 fm

Uma luminosidade instantânea de 10^{-30} $cm^{-2}s^{-1}$ corresponde, para um evento com seção de choque de 10^{-30} cm^2, a uma taxa de 1 evento por segundo.

Unidade usual para luminosidade integrada (representa o número de eventos coletados divididos pela seção de choque): **nb^{-1}** (nanobarn) ou **pb^{-1}**(picobarn)

Unidades naturais:

Grandeza	[kg, m, s]	[$\hbar$, c, Gev]	[$\hbar = c = 1$]
Energia	$\mathrm{kg\ m^2 s^{-}2}$	GeV	GeV
Momento	$\mathrm{kg\ m\ s^{-}1}$	GeV/c	GeV
Massa	kg	GeV/c^2	GeV
Tempo	s	$(\mathrm{GeV}/\hbar)^{-1}$	GeV^{-1}
Comprimento	m	$(\mathrm{GeV}/\hbar c)^{-1}$	GeV^{-1}
Área	m^2	$(\mathrm{GeV}/\hbar c)^{-2}$	GeV^{-2}

EXERCÍCIOS

1. Planeja-se a construção de um futuro colisor linear para operar como uma fábrica de Higgs operando com energia do C.M. $\sqrt{s}$ = 250 GeV. A seção de choque para o processo $e^+ + e^- \rightarrow H + Z$ é 250 fb. Se a luminosidade instantânea do colisor é 2×10^{-34} $cm^{-2}s^{-1}$ e ele deve permanecer operacional por metade do tempo, quantos bósons de Higgs devem ser produzidos em 5 anos de operação?

2. A seção de choque total do processo de aniquilação $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ é $\boldsymbol{\sigma} = 4\,\pi\,\boldsymbol{\alpha}^2/3s$. Calcule a seção de choque para $\sqrt{s}$ = 50 GeV, expressando sua resposta em unidades naturais e em barns.

SOLUÇÃO (1)

$$1 \text{ bn} = 10 \text{ fm} \times 10 \text{ fm} = 100 \times 10^{-30} \text{ m}^2 = 1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \sigma = 250 \times 10^{-15} \times 10^{-24} = 250 \times 10^{-39} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow N = \sigma \times L \times \Delta t$$

$$= (250 \times 10^{-39} \text{ cm}^2) \times (2 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}) \times (5 \times 360 \times 86400 \times 0.5\text{s})$$

$$\boxed{\approx 390\,000 \text{ eventos}}$$

SOLUÇÃO (2)

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \frac{4\pi(1/137)^2}{3 \times 50^2} = 8.9 \times 10^{-8}\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

$$\hbar c = 0.197\ \mathrm{GeV\ fm};\ 1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m};$$

$$1\ \mathrm{fm}^2 = 10^{-30}\ \mathrm{m}^2 = 10^{-2}\ \mathrm{b}$$

$$\text{Unidade de área} = \left(\frac{\mathrm{GeV}}{\hbar c}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \sigma = 8.9 \times 10^{-8}\ \mathrm{GeV}^{-2} \times 0.197^2\ \mathrm{GeV}^2\ \mathrm{fm}^2 \times 10^{-2}\mathrm{bn\ fm}^{-2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma \approx 34 \times 10^{-12}\ \mathrm{bn} = 34\ \mathrm{pn}}$$