Física Nuclear e de Partículas:
Lista #2 - Mecânica Quântica Relativística II

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

a) Prove as seguintes propriedades das matrizes α_i e β da equação de Dirac:

i) α_i e β são todos hermiteanos;

ii) $\mathrm{Tr}\alpha_i = \mathrm{Tr}\beta = 0$, em que Tr representa o traço de uma matriz;

iii) Os autovalores de α_i e β são ± 1;

iv) α_i e β possuem dimensão par;

b) Verifique explicitamente que as matrizes $\vec{\alpha}$ e β satisfazem as condições de Dirac.

Problema 2

a) Utilizando as formas explícitas das matrizes de Pauli 2×2, verifique as relações de comutação e anti-comutação:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathcal{I}$$

em que ϵ_{ijk} representa o tensor anti-simétrico usual e $\mathcal{I}$ representa a matriz identidade 2×2.
Utilize os resultados acima para mostrar que

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathcal{I} + i\epsilon_{ijk}.$$

b) Utilize a última identidade acima para mostrar que

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b}\mathcal{I} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

Obtenha a forma explícita 2×2 para $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

e utilize-a para mostrar que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2\mathcal{I}$.

Problema 3

Seja ϕ um espinor arbitrário com duas componentes e seja $\hat{u}$ um vetor unitário.
a) Mostre que $(1/2)(1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{u})\phi$ é um auto-estado de $\vec{\sigma} \cdot \hat{u}$ com autovalor $+1$. O operador $(1/2)(1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{u})$ é chamado operador projetor do auto-estado $\vec{\sigma} \cdot \hat{u} = +1$. Escreva um operador semelhante que projete o auto-estado $\vec{\sigma} \cdot \hat{u} = -1$.
b) Construa os espinores de duas componentes ϕ_+ e ϕ_- que são auto-estados de $\vec{\sigma} \cdot \hat{u}$ com auto-valores ± 1 e obedecendo a normalização $\phi_r^\dagger\phi_s = \delta_{rs}$ com $(r, s) = (+, -)$, para o caso $\hat{u} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta$.
Dica: Escolha para o espinor arbitrário $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problema 4

Verifique que o operador helicidade

$$h(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|p|} & \vec{0} \\ \vec{0} & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|p|} \end{pmatrix}$$

comuta com o operador Hamiltoneano de Dirac livre no espaço de momentos $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$.

Problema 5

Espinores de energia positiva $u(p, s)$ são definidos por

$$u(p,s) = (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi^s \end{pmatrix}, \;\; s = 1, 2$$

em que $\phi^{s\dagger}\phi^s = 1$. Verifique que esses estados satisfazem $u^\dagger u = 2E$.
De maneira similar, espinores de energia negativa $v(p, s)$ são definidos por

$$v(p,s) = (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^s \\ \chi \end{pmatrix}, \;\; s = 1, 2$$

em que $\chi^s \dagger \chi^s = 1$. Verifique que $v^\dagger v = 2E$.