Física Nuclear e de Partículas:
Lista #1 - Mecânica Quântica Relativística I

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

(Revisão de Mecânica Quântica Não-Relativística) Considere a equação de Schrödinger e sua complexa conjugada, multiplicadas, respectivamente, por $\psi^*(t,\vec{x})$ e $\psi(t,\vec{x})$.

a) Mostre que a diferença entre os produtos acima pode ser escrito na forma de uma equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

b) Utilizando o teorema de Gauss-Ostrogradsky, mostre que essa equação leva a uma lei de conservação.

c) Qual o significado físico atribuído à corrente ρ?

d) Convença-se de que essa lei de conservação é equivalente à afirmação de que "uma vez normalizada, a função de onda permanece normalizada".

e) Determine a forma da densidade de corrente $\vec{j}$ para uma solução de onda plana da equação de Schrödinger para uma partícula livre: $\psi(t,\vec{x}) = \exp\left(i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar\right)$.

Problema 2

a) Considere, agora, a equação de Klein-Gordon em unidades naturais

$$\frac{\partial^2 \psi(t,\vec{x})}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi(t,\vec{x}) + m^2 \psi(t,\vec{x}) = 0.$$

Efetuando uma manipulação semelhante ao item a) da questão anterior, mostre que também é possível obter uma equação de continuidade, com

$$\rho \equiv i\left[\psi(t,\vec{x})^* \frac{\partial \psi(t,\vec{x})}{\partial t} - \left(\frac{\partial \psi(t,\vec{x})^*}{\partial t}\right)\psi(t,\vec{x})\right], \quad \vec{j} \equiv \frac{1}{i}\left[\psi(t,\vec{x})^* \vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}) - \left(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x})^*\right)\psi(t,\vec{x})\right].$$

b) Utilizando a notação de quadrivetores, defina uma quadricorrente j^μ apropriada e mostre que a equação de continuidade obtida pode ser reescrita como

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

c) Você nota algum problema com a forma da "densidade de probabilidade"obtida?

d) Verifique que a onda plana $\psi(t,\vec{x}) = N\exp(-ip_\mu x^\mu)$ é uma solução para a equação de Klein-Gordon. Calcule a "densidade de probabilidade"para essa solução. Você nota algum problema adicional?