Métodos de Física Matemática 1 (FSC 5425):
Lista #1 - Estruturas Algébricas

Prof. Tiago Nunes

Problema 1

Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é simétrico se qualquer permutação de suas variáveis resulta em uma simetria de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

(a) Dê um exemplo de polinômio simétrico com $n = 3$;
(b) Dê um exemplo de polinômio não-simétrico com $n = 4$;
(c) Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ um polinômio simétrico. Qual o número de simetrias de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$?

Problema 2

a) Mostre que $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é um grupo (isto é, mostre que o conjunto dos números racionais excluídos do zero é um grupo sob a operação de multiplicação usual).
b) Mostre que a estrutura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, em que $+$ e $\cdot$ representam a soma e a multiplicação usual de números naturais, não é um anel.

Problema 3

Definimos o conjunto dos inteiros módulo n $\mathbb{Z}_n$ como o conjunto dos possíveis restos da divisão por n

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, ..., n - 1\},$$

a partir da operação % módulo:

$$a \,\%\, n = \text{resto da divisão a/n.}$$

Definimos a operação $+_n$ ("soma módulo n") como

$$a +_n b = (a + b) \,\%\, n.$$

(a) Verifique que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo (isto é, os inteiros módulo 4 são um grupo sob a operação de soma módulo 4) ;
(b) Obtenha a tabela de adições para o grupo acima;
(c) Verifique que ela é equivalente à tabela de composições das operações de simetria do *bumpy square* visto em sala.

Problema 4

Seja G_n o conjunto das n-ésimas raízes complexas da unidade, isto é, das soluções da equação

$$z^n = 1, z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que $(G_4, \cdot)$ é um grupo e que sua tabela de multiplicações é equivalente à tabela de adições do grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.
Dica: O conjunto G_n das n-ésimas raízes da unidade é definido como

$$G_n = \{\exp(2ki\pi/n) \mid k \in \{0, 1, 2, ..., (n - 1)\}\}$$

Problema 5

Verifique que a definição de corpo dada em sala de aula é equivalente à seguinte definição:
Um conjunto K com duas operações

$$+ : K \times K \to K, \qquad \cdot : K \times K \to K$$

é um corpo se:
a) $(K, +)$ é um grupo abeliano com elemento neutro 0 e o elemento inverso $-a$;
b) $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano com elemento neutro 1 e elemento inverso a^{-1} (note que $(K \backslash \{0\}$ representa o conjunto K excluído do elemento 0) ;
c) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in K$
d) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in K$